RELACIJA

10. Neka je $\varrho \subset A \times B$, tada je ϱ (*binarna*) *relacija u skupu* $A \times B$. Ako je $A = B$, onda se kaže da je ϱ *relacija u skupu* A.
Umjesto $(x, y) \in \varrho$ uobičajeno je pisati $x\varrho y$. Slično $(x, y) \notin \varrho \Leftrightarrow x \operatorname{non} \varrho y$.

11. Neka je $\varrho \subset S \times S$, tada su moguća svojstva relacije ϱ, na primjer:

11.1. *refleksivnost*: $(\forall a \in S)\, a\varrho a$;

11.2. *simetričnost*: $(\forall a, b \in S)\, a\varrho b \Rightarrow b\varrho a$;

11.3. *antisimetričnost*: $(\forall a, b \in S)\, a\varrho b \wedge b\varrho a \Rightarrow a = b$;

11.4. *tranzitivnost*: $(\forall a, b, c \in S)\, a\varrho b \wedge b\varrho c \Rightarrow a\varrho c$.

12. Binarna relacija ϱ u S je *relacija ekvivalencije* ako je *refleksivna*, *simetrična* i *tranzitivna*. Takva relacija se često označava sa $\sim$.

13. Binarna relacija koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna zove se *relacija* (*djelimičnog, parcijalnog*) *uređenja*. Relacija uređenja najčešće se označava sa $\leqq$ ili sa $\geqq$. Za skup S u kome je definisana relacija $\leqq$ (parcijalnog) uređenja kaže se da je (*parcijalno*) *uređen* tom relacijom.
Ako je skup S uređen relacijom $\leqq$ koja ima osobinu

$$(\forall a, b \in S)\,(a \leqq b) \vee (b \leqq a),$$

kaže se da je S tom relacijom *totalno* (*potpuno*) uređen.

FUNKCIJA

14. Neka su X i Y dva neprazna skupa. *Preslikavnje* ili *funkcija* f *skupa* X u *skup* Y je pravilo prema kome se svakom $x \in X$ pridružuje jedno i samo jedno $y \in Y$. Tu činjenicu zapisujemo na jedan od slijedećih načina:

$$f: X \to Y;\ f: (x, y),\ x \in X,\ y \in Y;\ X \xrightarrow{f} Y;\ x \mapsto f(x),\ x \in X,\ f(x) = y \in Y,$$

gdje se x naziva *original* (*nezavisno promjenljiva*),

$y = f(x)$ *slika* (*zavisno promjenljiva*), a

X se naziva *definicioni* skup (ili *domen*) preslikavanja.

Gornja definicija funkcije može se kraće zapisati:

$$f: X \to Y \overset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in X)\,(\exists!\, y \in Y)\, f(x) = y.$$

Moguća je slijedeća veza između funkcije i relacije:
Relacija $f \subset X \times Y$ je funkcija $f: X \to Y$ ako i samo ako su ispunjeni uslovi:

(1) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$;

(2) $\cup \{x \mid (x, y) \in f\} = X$.

15. Neka je $f: X \to Y \wedge A \subset X$, tada je $f(A) = \{y \mid (\exists x \in A)\, y = f(x)\}$.

16. Neka je $f: X \to Y$. Ako je $f(X) = Y$, tada kažemo da je f *preslikavanje skupa* X *na* skup Y ili da je f *surjekcija* (ili *preslikavanje na*).

17. Ako važi implikacija

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, onda se f naziva *uzajamno jednoznačno* (*preslikavanje*) ili *injekcija*, ili $1-1$ preslikavanje (sa X u Y).

18. Preslikavanje f koje je $1-1$ i *na* zove se *bijekcija*. Ako su X i Y konačni, onda se za bijekciju $f: X \to Y$ kaže da je *permutacija*.

19. Ako je $f: A \to B$ i $g: B \to C$, onda je *složeno preslikavanje* $gf: A \to C$ (ili *kompozicija preslikavanja* f i g) definisana sa

$$(\forall x \in A)\,(gf)(x) = g(f(x)).$$

20. Preslikavanje $f: X \to X$ definisano sa $f(x) = x$ za svako $x \in X$ naziva se *identičkim preslikavanjem* skupa X.

21. Ako je $f: X \to X$ i ako postoji preslikavanje $f^{-1}: f(X) \to X$ takvo da su složena preslikavanja ff^{-1} i $f^{-1}f$ identička preslikavanja, tj. takva da je

$$(\forall y \in f(X))\, f(f^{-1}(y)) = y \wedge (\forall x \in X)\, f^{-1}(f(x)) = x,$$

tada preslikavanje f^{-1} nazivamo *inverznim preslikavanjem* preslikavanja f.

22. Ako je $f: X \to Y$ obostrano jednoznačno preslikavanje, tada postoji inverzno preslikavanje $f^{-1}: f(X) \to X$ i ono je jedinstveno.

---

* Renatus Cartesius je latinsko ime i prezime francuskog matematičara i filozofa Dekarta (René Descartes, 1596–1650).

ZADACI

9. Neka je $f: x \mapsto \dfrac{2x-a-b}{b-a}$, $(x \in [a, b],\ a,\ b \in R)$. Dokazati da je f bijekcija sa $[a, b]$ na $[-1, 1]$.

10. Odrediti sve funkcije $f: A \to B$ ako je:

a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$; b) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$;

c) $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$.

Uoči preslikavanja koja su sirjekcija, injekcija ili bijekcija!

11. Ako su A, $B \subset X$, gdje je X domen funkcije f, dokazati da je:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \qquad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

RJEŠENJA

9. $f^{-1}: y \mapsto \dfrac{1}{2}[(b-a)y + a + b]\ (y \in [-1, 1] \xrightarrow{f^{-1}} [a, b])$.

10. a) Skup svih preslikavanja $\{f: A \mapsto B\} = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)\}$, gdje je svaka uređena trojka, u stvari, $(f(1), f(2), f(3))$. Sva preslikavanja, osim (a, a, a) i (b, b, b), jesu surjekcije, nema injekcija ni bijekcija;

b) u ovom slučaju ima $3^3 = 27$ preslikavanja. Preslikavanja $(f(1), f(2), f(3)) \in \{(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)\}$ su surjektivna i injektivna, tj. bijektivna;

c) ima $3^2 = 9$ preslikavanja. Nema surjekcija, injekcije su $(f(1), f(2)) \in \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)\}$.

11. $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow (\exists x \in A \cup B)\ y = f(x) \Leftrightarrow (\exists x \in A) \vee (\exists x \in B)$
$y = f(x) \Leftrightarrow ((\exists x \in A)\ y = f(x)) \vee ((\exists x \in B)\ y = f(x)) \Leftrightarrow (y \in f(A)) \vee (y \in f(B)) \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$;
$y \in f(A \cap B) \Leftarrow (\exists x \in A \cap B)\ y = f(x) \Leftarrow ((\exists x \in A) \wedge (\exists x \in B))\ y = f(x) \Leftarrow ((\exists x \in A)\ y = f(x)) \wedge$
$\wedge ((\exists x \in B)\ y = f(x)) \Leftarrow (y \in f(A)) \wedge (y \in f(B)) \Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B)$.

Obrnuta inkluzija ne vrijedi u opštem slučaju, može npr. biti A, $B \neq \emptyset$, $f(A) = f(B)$, $A \cap B = \emptyset$, pa je $f(A \cap B) = \emptyset \neq f(A) \cap f(B) = f(A)$.